EC 763 : Mathématiques pour l'ingénieur 2

Guillaume Franchi

Cursus Ingénieur $2^{\text{ème}}$ année

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires

Pré-requis

- Bases d'algèbre linéaire.
- Calcul matriciel.

Bibiliographie

- Mathématiques tout en un BCPST $1^{\text{ère}}$ année, *Marc-Aurèle Massard*, éditions Dunod.
- Mathématiques tout en un BCPST $2^{\text{ème}}$ année, *Marc-Aurèle Massard*, éditions Dunod.
- Algèbre linéaire, *Joseph Grifone*, éditions Cépaduès.

Objectifs

- Apporter des réponses mathématiques à des problèmes industriels variés :
    - en analyse de données ;
    - sur la représentation de certaines variables ou individus ;
    - en recherche opérationnelle (optimisation coûts / recettes,...) ;
    - ...

1. Contexte et définition

Exemple

Une usine fabrique deux produits, A et B.

Chaque produit nécessite du temps machine et de la main d'œuvre. La capacité de la machine est limitée, tout comme les heures de travail disponibles :

- Pour produire 1 unité de A, il faut 2 heures de machine et 1 heure de main-d'œuvre.
- Pour produire 1 unité de B : il faut 1 heure de machine et 2 heures de main-d'œuvre.

L'usine dispose de 100 heures de machine et 80 heures de main-d'œuvre au total, et la direction souhaite utiliser toutes ses ressources (machine et main d'œuvre).

Combien de produits de chaque type l'usine peut-elle produire ?

Définition

Un **système linéaire** (S) à n équations et p inconnues est donné par

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p & = & b_p \end{array} \right.$$

où

- pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, les **coefficients** a_{ij} et b_i sont fixés et connus ;
- les **variables** $x_1, \ldots, x_p$ sont inconnues.

Exemples

- $(S) : \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ est un système linéaire.
- $(S) : \begin{cases} 2x^2 - y + z = 2 \\ x + 3y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ n’est pas un système linéaire.

2. Solutions d’un système linéaire

Interprétation géométrique

- Dans le cas où l'on a deux inconnues, chaque équation correspond à une droite du plan.
- Si $b \neq 0$, on a en effet

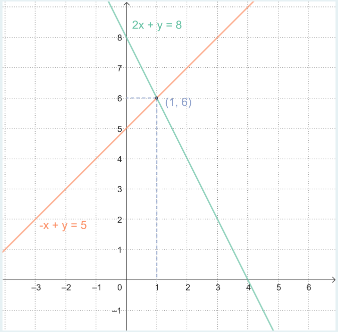
$$ax + by = c \iff y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

- Dans un système d'équations linéaires à deux inconnues, on cherche donc les coordonnées (x, y) (*si elles existent*) du point d'intersection des droites correspondant aux équations du système (*si il existe*).

Exemple

On résout le système

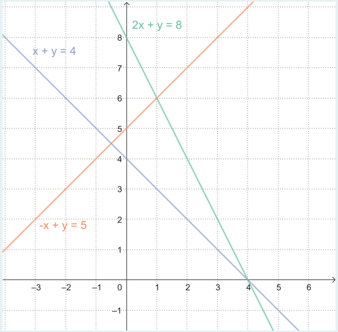
$$(S_1) : \begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = x + 5 \end{cases}$$



Exemple

Le système suivant ne possède pas de solution.

$$(S_2) : \begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$



Propriété

Pour n'importe quel système linéaire (S), seules trois situations sont possibles.

- (S) n'a pas de solution ;
- (S) admet une infinité de solutions ;
- (S) admet une unique solution.

Exercice

Donner l'interprétation géométrique de ces trois situations dans le cas d'un système de deux équations à deux inconnues.

3. Résolution d’un système linéaire

Opérations élémentaires

Les opérations suivantes ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

- Echanger la ligne i et la ligne j. On note $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- Multiplier la ligne i par un nombre $\alpha \neq 0$. On note $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.
- Ajouter la ligne j à la ligne i. On note $L_i \longleftarrow L_i + L_j$.

Remarque

A l'issue de telles opérations, deux cas peuvent se produire.

- On obtient une ligne de la forme

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \text{ avec } b \neq 0.$$

  Dans ce cas, le système n'admet pas de solution.
- On obtient une ligne de la forme

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0.$$

  Dans ce cas, cette ligne peut être supprimée.

Pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss consiste à enchaîner les opérations élémentaires sur les lignes d'un système afin d'obtenir un **système échelonné.**

Exemple

On échelonne le système

$$(S) : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ x + 4y - 6z = 2 \end{cases}$$

Propriété

Une fois le système échelonné, deux cas peuvent se produire.

- Il y a autant d'équations que d'inconnues. Le système possède alors une unique solution.
- Il y a plus d'inconnues que d'équations. Les inconnues supplémentaires sont alors considérées comme des **variables libres**. Le système possède alors une infinité de solutions, s'exprimant toutes en fonction de ces variables libres.

Exercice

Résoudre le système de l'exemple précédent.

Exercice

Résoudre le système

$$(S) : \begin{cases} x - 3y + 4z - 2t = 5 \\ x - y + 9z - t = 7 \\ x - 2y + 7z - 2t = 9 \end{cases}$$