EC 763 : Mathématiques pour l'ingénieur 2

Guillaume Franchi

Cursus Ingénieur $2^{\text{ème}}$ année

Chapitre 2 : Calcul matriciel

1. Définitions

Le calcul matriciel est omniprésent dans une vaste gamme d'applications, notamment en analyse statistique :

- Analyse de données multivariées.
- Réduction et résumé des données.
- ...

Définitions

- Une **matrice** A peut être vue comme un tableau de nombre à n lignes et p colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- On dit que A est de **dimension** $n \times p$.
- Les éléments d'une matrice sont représentés avec un indice de ligne et de colonne sous la forme $a_{i,j}$ où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne.
- On note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Exercice

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Quelles sont les dimensions des matrices A et B ?
- Déterminer les valeurs de $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$.
- Déterminer les valeurs de $b_{3,1}$, $b_{3,1}$ et $b_{1,2}$.

Définition

- Une matrice est dite **carrée** si elle possède autant de lignes que de colonnes, i.e. lorsque $n = p$.
- On peut alors noter $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exemple

La matrice A ci-dessous est carrée, la matrice B ne l'est pas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Opérateurs sur les matrices

Transposée d'une matrice

- La transposée d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est la matrice notée A^T dont les lignes sont égales aux colonnes de A.
- A^T est de dimension $p \times n$ et on a en fait $A^T = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}}$.
- Plus précisément,

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}\right\}}_{p} n \quad \text{et} \quad A^T = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}\right\}}_{n} p.$$

Exercice

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les matrices transposées A^T et B^T.

Trace d'une matrice

La trace d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, notée $\mathbf{Tr}(A)$, est la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathbf{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exercice

- Calculer la trace de la matrice A ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 6 & 7 \\ \sqrt{2} & 5 & -5 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Que vaut $\mathbf{Tr}(A^T)$?

Exercice

- Calculer la trace de la matrice A ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 6 & 7 \\ \sqrt{2} & 5 & -5 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Que vaut $\mathbf{Tr}(A^T)$?

Propriété

Pour toute matrice carrée A, on a

$$\mathbf{Tr}(A^T) = \mathbf{Tr}(A).$$

3. Matrices particulières

Matrices diagonales

- Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dite diagonale si seuls ses coefficients diagonaux sont non nuls, i.e.

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0.$$

- En d'autres termes, on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}).$$

Remarque

Parmi les matrices diagonales de dimension $n \times n$, on a la **matrice identité**

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices symétriques

- Une matrice carrée A est dite symétrique si elle est égale à sa transposée :

$$A^T = A.$$

- En d'autres termes

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,j} = a_{j,i}.$$

Exercice

Les matrices ci-dessous sont-elles symétriques ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Lois de composition

Définitions

Soient $A = (A_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ deux matrices de même dimension $n \times p$.

- l'**addition** de A et B est la matrice de dimension $n \times p$ donnée par
$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j}.$$
- **la multiplication de A par un nombre** λ est la matrice de dimension $n \times p$ donnée par
$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{i,j}.$$

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices de même dimension $n \times p$. On a :

- $A + B = B + A$ *(l'addition est commutative)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(l'addition est associative)*
- Pour tout nombre λ,
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
(la multiplication par un nombre est distributive par rapport à l'addition)

Exercice

Reprenons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer :

- $A + B$
- $A - B$
- $2A + 3B$

Propriétés

Soient A, B deux matrices carrées de même dimension $n \times n$ et λ un nombre quelconque. On a :

- $\mathbf{Tr}(A + B) = \mathbf{Tr}(A) + \mathbf{Tr}(B)$;
- $\mathbf{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathbf{Tr}(A)$.

5. Produit de matrices

Définition

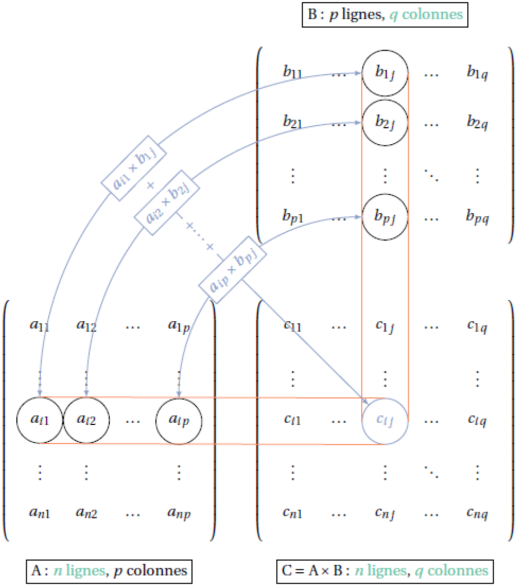
Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice de dimension $p \times q$.
Le **produit matriciel** de A par B est la matrice $C = A \cdot B$ de dimension $n \times q$ donnée par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall j \in \{1, \ldots, q\},\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque

La matrice A doit avoir autant de colonnes que B a de lignes.

Schéma



B : p lignes, q colonnes
b_{11} … b_{1j} … b_{1q}
b_{21} … b_{2j} … b_{2q}
b_{p1} … b_{pj} … b_{pq}
$a_{i1} \times b_{1j}$
+
$a_{i2} \times b_{2j}$
+ … +
$a_{ip} \times b_{pj}$
a_{11} a_{12} … a_{1p}
a_{i1} a_{i2} … a_{ip}
a_{n1} a_{n2} … a_{np}
c_{11} … c_{1j} … c_{1q}
c_{i1} … c_{ij} … c_{iq}
c_{n1} … c_{nj} … c_{nq}
A : n lignes, p colonnes
C = A × B : n lignes, q colonnes

Exercice

On reprend les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

Exercice

On reprend les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

Remarque

Le produit de matrice n'est pas commutatif. En général, lorsque le produit est possible

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Propriété

La matrice identité est l'**élément neutre** pour la multiplication de matrices.
Pour toute matrice A de dimension $n \times n$, on a

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Propriété

Soient A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice de dimension $p \times q$, alors

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$