EC 763 : Mathématiques pour l'ingénieur 2

Guillaume Franchi

Cursus Ingénieur 2ème année

Chapitre 4 : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$

1. Introduction

Espace vectoriel

- Intuitivement, un **espace vectoriel** est un ensemble sur lequel on définit une addition interne et une multiplication externe par un scalaire.
- On dispose d'un élément neutre pour l'addition, noté $\overrightarrow{0}$, et les règles usuelles de calcul sont vérifiées.

Exemples

- L'ensemble
$$\mathbb{R}^p = \{\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_p) : \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ x_i \in \mathbb{R}\}$$
est un espace vectoriel avec :
    - $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$ et $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = (\lambda x_1, \ldots ; \lambda x_p)$;
    - $\overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$.
- L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$, noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel, avec les opérations vues dans les cours précédents.

2. Sous-espace vectoriel

Définition

Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** *(noté sev)* si :

- $0 \in F$;
- F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y} \in F.$$

Exemples

- L'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$.
- L'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$, noté $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sev.

Définition

Soient $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ des éléments d'un espace vectoriel E.

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ le sev

$$Vect(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}) = \{\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{v_k} : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

- Il s'agit du plus petit sev *(au sens de l'inclusion)* de E contenant $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$.

3. Bases d’un espace vectoriel

Définition

Soient $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ des éléments d'un espace vectoriel E.

- La famille $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est dite **libre** si

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

- La famille $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est dite **génératrice** si pour tout $\overrightarrow{v} \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n}.$$

- $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est une **base** de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemples

- La famille $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, \dots, 0), \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \overrightarrow{e_p} = (0, \dots, 0, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^p$, appelée **base canonique.**
- La famille formée des matrices $E_{i,j}$ avec $E_{i,j} = \left(e_{k,l}\right)_{k,l}$, où $e_{i,j} = 1$ et $e_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ et $l \neq j$, est une base de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition

Un espace vectoriel E est dit de **dimension finie** s'il existe une famille finie de vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ qui soit une base de E.

Propriété

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. On appelle ce nombre la **dimension** de E, notée $dim(E)$.

Propriété

Dans un espace vectoriel E de dimension finie $dim(E) = n$.

- Toute famille libre avec n éléments est une base.
- Toute famille génératrice avec n éléments est une base.

Propriété

Soit $(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ une base d'un espace vectoriel E. Tout vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ s'écrit **de façon unique** :

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{v_n}.$$

Le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ constitue les **coordonnées** de $\overrightarrow{v}$ dans cette base.

Exemple

Considérons la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$.

- Les coordonnées de $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ sont $(2, -4, 1)$.
- Si $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 3)$, alors $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}$.

4. Changement de base

Dans toute la suite,sauf mention contraire, la famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Propriété

Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, on définit

$$\overrightarrow{f_j} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} \overrightarrow{e_i} = \alpha_{1,j} \overrightarrow{e_1} + \alpha_{2,j} \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_{p,j} \overrightarrow{e_p},$$

et on note $P = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} & \ldots & \overrightarrow{f_p} \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \ldots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix} = \| \overrightarrow{f_1} \ldots \overrightarrow{f_p} \|_{\overrightarrow{e_i}} \end{array}$$

La famille $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p})$ est une base de $\mathbb{R}^p$ *ssi* la matrice P est inversible.

Exercice

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les familles suivantes sont-elles des bases ?

- $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (-1, 0, 0)$.
- $\overrightarrow{v_1} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 1)$.

Définition

La matrice $P = \| \overrightarrow{f_1} \ \ldots \ \overrightarrow{f_p} \|_{\overrightarrow{e_i}}$ s'appelle la **matrice de passage** de $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_p})$ à $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p})$, aussi notée :

$$P = P_{\overrightarrow{e_i} \to \overrightarrow{f_i}}.$$

Propriété

La matrice P^{-1} vérifie

$$P^{-1} = \|\overrightarrow{e_1} \ldots \overrightarrow{e_p}\|_{\overrightarrow{f_i}} = P_{\overrightarrow{f_i} \to \overrightarrow{e_i}}.$$

Propriété

Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$, de coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_p)$ dans une base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$.

Les coordonnées $X' = (x'_1, \ldots, x'_p)$ de $\overrightarrow{x}$ dans une autre base $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p})$ sont données par

$$X' = P^{-1}X \iff PX' = X.$$

Remarque

Attention, dans cette dernière écriture matricielle, les vecteurs X et X' sont écrits en colonnes.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ définis par

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}. \end{cases}$$

- Vérifier que $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
- Soit $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$?

Soit M une matrice carrée de $M_p(\mathbb{R})$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{y}$ est l'**image** du vecteur $\overrightarrow{x}$ par M si
$$Y = MX$$
Où X et Y sont les vecteurs colonnes des coordonnées respectives de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$.

Propriété

Si X' et Y' sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans une base $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p})$, alors $Y' = M'X'$ où

$$M' = P^{-1}MP \quad \text{avec} \quad P = P_{\overrightarrow{e_i} \to \overrightarrow{f_i}} = \| \overrightarrow{f_1} \ \ldots \ \overrightarrow{f_p} \|_{\overrightarrow{e_i}}.$$

Exercice

On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, et on considère les vecteurs

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{f_2} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{f_3} = (1, 0, 1) \end{cases}$$

exprimés dans la base canonique.

- Vérifier que $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer la représentation de M dans cette nouvelle base.

5. Produit scalaire et distance

Définitions

Soient $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$.

- Le **produit scalaire** de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ est le nombre réel donné par

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p.$$

- La **norme** du vecteur $\overrightarrow{x}$ est donnée par :

$$\| \overrightarrow{x} \| = \sqrt{\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}.$$

Propriétés

- Le produit scalaire est symétrique, et linéaire en chacun de ces arguments :
  - $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p,\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$;
  - $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^p, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \langle \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.
- Le produit scalaire est défini positif :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p,\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geqslant 0,$$

  avec égalité *ssi* $\vec{x} = \vec{0}$.
- Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$, $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.
- Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$.
- Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p$, $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ *(inégalité triangulaire)*.

Orthogonalité

Deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ d e$\mathbb{R}^p$ sont **orthogonaux** si

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = 0.$$

Propriété

Soient $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^p$, on a

$$\| \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \|^2 = \| \overrightarrow{x} \|^2 + \| \overrightarrow{y} \|^2.$$

Familles orthogonales et orthonormales

Une famille $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ de $\mathbb{R}^p$ est dite :

- **orthogonale** si
$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ \langle \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j} \rangle = 0.$$
- **orthonormale** si elle est orthogonale et si
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \|\overrightarrow{v_i}\| = 1.$$

Remarques

- La base canonique de $\mathbb{R}^p$ est une base orthonormale.
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Exercice

- Montrer que la famille de vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1,1,1,1),\ \overrightarrow{v_2} = (1,0,0,-1), \overrightarrow{v_3} = (0,1,-1,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_4} = (1,-1,-1,1)$$

  est orthogonale.
- En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.

Soient $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, dont les coordonnées s'écrivent en vecteurs colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ est donné par

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = X^T Y.$$

Propriété

Soit $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p})$ une famille de $\mathbb{R}^p$, et P la matrice

$$P = \| \overrightarrow{f_1} \ \ldots \ \overrightarrow{f_p} \|.$$

$(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p})$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$ *ssi*

$$P^T P = P P^T = I_p.$$

Remarque

En particulier, la matrice de passage de la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$ vers une base orthonormale $(\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_p})$, notée $P = P_{\overrightarrow{e_i} \rightarrow \overrightarrow{f_i}}$ est inversible, d'inverse $P^{-1} = P^T$.

Exercice

Soit P la matrice de passage de la base canonique vers une base orthonormale.

- Montrer que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^p$

$$\langle P^T X, P^T Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

  où les vecteurs sont notés en colonnes.
- En déduire que pour tout $X \in \mathbb{R}^p$,

$$\|P^T X\| = \|X\|.$$

- Qu'en déduit-on ?