EC 763 : Mathématiques pour l'ingénieur 2

Travaux Dirigés n° 4 : Espaces vectoriels et bases

Guillaume Franchi

Année universitaire 2025-2026

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles, les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$.

2) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y)^2 = 2x + y\}$.

3) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = -1\}$.

Exercice 2

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E à préciser.

1) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

2) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

3) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + b + c + d = 0 \right\}$

Familles libres, familles génératrices, bases

Exercice 3

Montrer que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, où $\overrightarrow{v_1} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-1, 1)$, engendre $\mathbb{R}^2$. Est-elle une base ?

Exercice 4

1) La famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ de $\mathbb{R}^3$, où $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{v_2} = (2, 1, 3)$ et $\overrightarrow{v_3} = (0, -1, 5)$ est-elle libre ? Est-elle génératrice ?

2) Même question pour la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ où $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 2, 1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (2, 3, 2)$.

Exercice 5

1) Soient $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y et z pour que

$$\overrightarrow{w} = (x, y, z) \in \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

2) Soient $\overrightarrow{u} = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{v} = (0,0,1,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y, z et t pour que

$$\overrightarrow{w} = (x,y,z,t) \in \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Changement de base

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,1,-1)$, $\overrightarrow{v} = (-1,1,1)$ et $\overrightarrow{w} = (1,-1,1)$.

1) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.

Exercice 7 On considère les vecteurs $\overrightarrow{f_1} = (2,1,1)$, $\overrightarrow{f_1} = (-1,0,1)$ et $\overrightarrow{f_3} = (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$, et la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice de passage $P = P_{\overrightarrow{e_i} \to \overrightarrow{f_i}}$ de la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ vers la base $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$.

3) Calculer P^{-1}.

4) Déterminer la représentation de M dans la base $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$.

Exercice 8 Considérons la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ où

$$\overrightarrow{f_1} = (-4,3,2); \quad \overrightarrow{f_2} = (-4,0,1); \quad \overrightarrow{f_3} = (2,1,0);$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers $\mathcal{F}$.

3) Déterminer la représentation de la matrice M dans la base $\mathcal{F}$.