EC 763 : Mathématiques pour l'ingénieur 2

Travaux Dirigés n° 5 : Produit scalaire et distance

Guillaume Franchi

Année universitaire 2025-2026

Bases orthonormées

Exercice 1

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$, et posons $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Justifier que F est de dimension 2, et déterminer une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ de F, avec $\overrightarrow{u_1}$ proportionnel à $\overrightarrow{u}$.

2) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{u_3}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Projections orthogonales

Définition.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^p$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{u} = p_F(\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u} - p_F(\overrightarrow{u}))$$

avec

- $p_F(\overrightarrow{u}) \in F$;
- $\overrightarrow{u} - p_F(\overrightarrow{u}) \perp F$, i.e.

$$\forall \overrightarrow{v} \in F,\ \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - p_F(\overrightarrow{u}) \rangle = 0.$$

$p_F(\overrightarrow{u})$ est la **projection orthogonale** de $\overrightarrow{u}$ sur F.

Propriété.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^p$, la projection $p_F(\overrightarrow{u})$ est l'élément $\overrightarrow{v}$ de F qui minimise la norme $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$, i.e.

$$\forall \overrightarrow{v} \in F,\ \|\overrightarrow{u} - p_F(\overrightarrow{u})\| \leqslant \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|.$$

Exercice 2

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(2x + y, x - 3y, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et en donner une base.

2) En déduire une base orthonormée de F.

3) On note p_F la projection orthogonale sur F. Déterminer $p_F(\overrightarrow{u})$ pour $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(2x + y - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (y - 1)^2 > 0$.

5) Montrer que cette dernière quantité admet un minimum que l'on déterminera lorsque $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

On note F le sev de $\mathbb{R}^2$ défini par $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{v} = (1, 2)$.

1) Déterminer une base orthonormale $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ avec $\overrightarrow{v_1}$ proportionnel à $\overrightarrow{v}$.

2) Pour $\overrightarrow{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $p_F(\overrightarrow{u})$.

3) Déterminer la matrice représentant p_F dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

4) En déduire la matrice représentant p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Lien avec la régression linéaire

Exercice 4

Soient $X_1, \ldots, X_p$ p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, avec $(X_1, \ldots, X_p)$ libre. On note $X = \|X_1 \ldots X_p\|_{e_i}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ représentant les vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1) Quelle est la dimension de $X^T X$? Montrer que cette matrice est inversible.

On note $F = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_p)$, et p_F la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur F.

2) Montrer que la matrice représentant p_F dans la base canonique s'écrit $X(X^T X)^{-1} X^T$.

Dans le problème de la régression linéaire, on cherche un vecteur $\beta \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

où

- $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ correspond aux n réponses ;
- $X = \|X_1 \ldots X_p\|_{e_i} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice correspondant aux n observations des p variables explicatives ;
- $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ correspond à un terme d'erreur.

Une estimation $\widehat{\beta}$ de β se fait par la méthode des **Moindres Carrés Ordinaires (MCO)** :

$$\widehat{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\mathrm{argmin}} \; \|Y - X\beta\|^2.$$

3) Expliquer en quoi cela revient à rechercher la projection orthogonale de Y sur F.

4) En déduire une expression algébrique de $\widehat{\beta}$.