EC 763 : Mathématiques pour l'ingénieur 2

Travaux Dirigés n° 6 : Diagonalisation de matrices

Guillaume Franchi

Année universitaire 2025-2026

Diagonalisation de matrices

Exercice 1

Les matrices ci-dessous sont-elles diagonalisables ? Si oui, déterminer les matrices de passage et la matrice diagonale qui en résulte.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4) $E = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 6 \\ -6 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est elle diagonalisable ? Si oui, déterminer les matrices de passage et la matrice diagonale qui en découle.

2) En déduire une formule générale pour le calcul de A^k, où $k \in \mathbb{N}$.

Décomposition en valeurs singulières

Exercice 3

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Enoncer le résultat sur la décomposition en valeurs singulières pour la matrice M.

2) Calculer $M^T M$. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

3) Sans calculer les matrices de passages, déterminer la représentation de la matrice M dans la décomposition en valeurs singulières.

Exercice : Examen du 01/12/2023 (14 pts)

Soit M la matrice 3×3 définie par

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $P(x) = \det(M - xI_3)$. En déduire que 0 est une valeur propre simple de M, et 1 une valeur propre double de M. (4 pts)

2) Peut-on, à ce stade, affirmer que la matrice M est diagonalisable ? Justifier brièvement votre réponse. (1pt)

3) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre 1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ils orthogonaux ? Justifier. (3pts)

4) Calculer un vecteur propre $\overrightarrow{w}$ associé à la valeur propre 0. (2pts)

5) Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonénes des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Montrer que P est inversible. (2pts)

6) Peut-on affirmer que M est diagonalisable. Si oui, écrire M sous la forme d'un produit de trois matrices, dont la deuxième est une matrice diagonale. (2pts)